

Equivalences compactes entre deux operateurs fermes sur un espace de HILBERT

Dédié au Professeur Hans Triebel à l'occasion de son cinquantième anniversaire

Par JEAN-PHILIPPE LABROUSSE et BRIGITTE MERCIER de Nice

(Reçue 23 Avril 1986)

Let H be a HILBERT space, let $\mathcal{C}(H)$ denote the set of all closed densely defined linear operators on H and let $\mathcal{L}(H)$ denote the set of all bounded elements of $\mathcal{C}(H)$. If $A, B \in \mathcal{L}(H)$, set: $A \sim B$ iff $A - B$ is compact. Then \sim is an equivalence relation on $\mathcal{L}(H)$ and many results have been stated and proved making use of this equivalence relation (e.g. correction of spectra by compact perturbations, CALKIN algebras . . . etc . . .). The aim of the present paper is to show that it is possible to extend \sim to the whole of $\mathcal{C}(H)$ in such a way that (after suitable modifications) most of the results referred to above on $\mathcal{L}(H)$ are still true on $\mathcal{C}(H)$.

§ 0. Introduction

Soit H un espace de HILBERT sur \mathbb{C} . Notons $\mathcal{C}(H)$ l'espace des operateurs linéaires A , de domaine $D(A)$ dense dans H , d'image $R(A)$ contenue dans H et de graphe $G(A)$ fermé dans $H \times H$. Notons $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des éléments bornés de $\mathcal{C}(H)$ et $\mathcal{K}(H)$ l'ensemble des éléments compacts de $\mathcal{L}(H)$. Si $A \in \mathcal{C}(H)$ notons $N(A)$ son noyau et $N(A)^\perp$ l'orthogonal de $N(A)$. Alors $c(A)$, la conorme de A , est définie par:

$$c(A) = \inf_{u \in D(A) \cap N(A)^\perp} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

Proposition 0.1 (cf [6]). *Si $A \in \mathcal{C}(H)$ alors:*

$$R(A) \text{ fermée} \Leftrightarrow c(A) > 0.$$

Si A^ est l'adjoint de A $c(A^*) = c(A)$:*

Definition 0.1 $A \in \mathcal{C}(H)$ est dit « de FREDHOLM » (noté $A \in \mathcal{F}(H)$) si:

- a) $R(A)$ est fermée
- b) $\dim N(A) < \infty$; $\text{codim } R(A) < \infty$

Alors $\chi(A)$, l'indice de A est défini par

$$\chi(A) = \dim N(A) - \text{codim } R(A).$$

Proposition 0.2 (cf [6]). Si $A \in \mathfrak{F}(H)$ alors:

$$A^* \in \mathfrak{F}(H); \quad \chi(A^*) = -\chi(A).$$

Definition 0.2 Si $A \in \mathcal{C}(H)$ posons:

$$\varrho_e(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda I \in \mathfrak{F}(H)\}$$

$$\sigma_e(A) = \mathbb{C} \setminus \varrho_e(A).$$

$\varrho_e(A)$ et $\sigma_e(A)$ sont appelés respectivement l'ensemble résolvant essentiel et le spectre essentiel de A .

Theoreme 0.1. (cf [2]) $\forall A \in \mathfrak{L}(H) \cap \mathfrak{F}(H) \exists \delta > 0$ tel que $\forall B \in \mathfrak{L}(H) \|A - B\| < \delta \Rightarrow B \in \mathfrak{F}(H)$ et $\chi(B) = \chi(A)$. Ce résultat a été généralisé successivement dans [10] et [16].

Corollaire 0.1 $\chi(A - \lambda I)$ est constant sur chaque composante connexe de $\varrho_e(A)$.

Avant d'énoncer le théorème 0.1 sous sa forme la plus générale, il faut introduire une métrique g sur $\mathcal{C}(H)$.

Definition 0.3 (cf [9]). Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$ et notons $P_{G(A)}$ (resp. $P_{G(B)}$) la projection orthogonale dans $H \times H$ sur $G(A)$ (resp. sur $G(B)$). Alors posons:

$$\delta(A, B) = \|(I - P_{G(B)}) P_{G(A)}\|$$

$$g(A, B) = \|P_{G(A)} - P_{G(B)}\|.$$

Proposition 0.3 (cf [8], [12], [14]). Si $A, B \in \mathcal{C}(H)$ on a:

$$(0.1) \quad \delta(A, B) = \delta(B^*, A^*)$$

$$(0.2) \quad g(A, B) = \max \{\delta(A, B), \delta(B, A)\} = g(A^*, B^*).$$

Proposition 0.4. (cf [4], [12])

$$(0.3) \quad \text{Si } A \in \mathcal{C}(H), T \in \mathfrak{L}(H) \text{ alors } g(A, A + T) \leq \|T\|$$

$$\text{Si } A \in \mathfrak{L}(H), B \in \mathcal{C}(H) \text{ avec } g(A, B) < 1/\sqrt{1 + \|A\|^2}$$

$$(0.4) \quad \text{alors: } B \in \mathfrak{L}(H) \text{ et } \|A - B\| \leq \sqrt{1 + \|A\|^2} \sqrt{1 + \|B\|^2} g(A, B).$$

Theoreme 0.2 (cf [4]) (Premier théorème de stabilité). $\forall A \in \mathfrak{F}(H) \forall B \in \mathcal{C}(H)$

$$g(A, B) < \frac{c(A)}{\sqrt{1 + c^2(A)}} \Rightarrow B \in \mathfrak{F}(H) \text{ et } \chi(B) = \chi(A).$$

Un autre type de stabilité pour $\mathfrak{F}(H)$ a été établi dans [2]:

Theoreme 0.3. $\forall A \in \mathfrak{L}(H) \cap \mathfrak{F}(H); \forall K \in \mathfrak{K}(H)$

$$B = A + K \in \mathfrak{F}(H) \text{ et } \chi(B) = \chi(A).$$

Ce résultat a été généralisé dans [16] et peut également s'énoncer sous la forme équivalente:

Theoreme 0.4 $\forall A \in \mathfrak{L}(H) \cap \mathfrak{F}(H) \forall B \in \mathfrak{L}(H)$

$$A - B \in \mathfrak{K}(H) \Rightarrow B \in \mathfrak{F}(H) \text{ et } \chi(B) = \chi(A).$$

C'est sous cette forme que nous nous proposons d'étendre à $\mathcal{C}(H)$ ce deuxième théorème de stabilité.

Dans ce but nous rappelons au § 1 un certain nombre de définitions et de résultats déjà connus. Au § 2 nous donnons les démonstrations de propositions tirées pour la plupart de [15]. Au § 3 on trouvera les résultats permettant de donner la définition d'équivalence compacte forte et de démontrer le deuxième théorème de stabilité sur $\mathcal{C}(H)$ (théorème 3.1). Enfin au § 4 nous énonçons la généralisation à $\mathcal{C}(H)$ d'un des résultats de [3] sur les opérateurs essentiellement normaux de $\mathcal{L}(H)$, dont la démonstration est dans [15]. En outre on trouvera dans ce paragraphe l'annonce d'autres résultats dont la démonstration fera l'objet d'un travail ultérieur à paraître.

§ 1. Quelques résultats auxiliaires

Proposition 1.1 (cf [4], [17]). Soit $A \in \mathcal{C}(H)$. Alors $R_A = (I + A^*A)^{-1}$ est un opérateur symétrique positif dont l'image est dense et égale à $D(A^*A)$. En outre:

$$(1.1) \quad A^*AR_A = I - R_A$$

et si $u \in D(A)$ on a

$$(1.2) \quad R^*Au = AR_Au.$$

On en déduit que:

$$(1.3) \quad (AR_A)^* = A^*R_{A^*}$$

$$\text{et que } \forall u \in H \left\| \left(\frac{1}{2} - R_A \right) u \right\|^2 + \|AR_Au\|^2 = \frac{1}{4} \|u\|^2,$$

$$(1.4) \quad \left(d'où \|R_A\| \leq 1; \|AR_A\| \leq \frac{1}{2} \right).$$

Proposition 1.2 (cf [4], [12]). Soit $S_A = \sqrt{R_A}$, la racine carrée symétrique et positive de R_A . Alors $R(S_A) = D(A)$ et si $u \in D(A)$ on a $S_{A^*}Au = AS_Au$.

On en déduit comme précédemment que:

$$(1.5) \quad (AS_A)^* = A^*S_{A^*}$$

et que

$$(1.6) \quad \forall u \in H \|S_Au\|^2 + \|AS_Au\|^2 = \|u\|^2$$

$$(1.7) \quad (d'où \|S_A\| \leq 1; \|AS_A\| \leq 1).$$

Proposition 1.3 (cf [19], [4]). Si $A \in \mathcal{C}(H)$ on a:

$$P_{G(A)} = \begin{pmatrix} R_A & A^*R_{A^*} \\ AR_A & I - R_A \end{pmatrix} \text{ sur } H \times H.$$

Proposition 1.4 Si $A, B \in \mathcal{C}(H)$ on a:

$$(I - P_{G(B)}) P_{G(A)} = \begin{pmatrix} S_B & B^*S_{B^*} \\ BS_B & -S_{B^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ BS_BS_A - S_{B^*}AS_A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_A & A^*S_{A^*} \\ AS_A & -S_{A^*} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Simple vérification en utilisant (1.1), (1.2) et (1.5).

De même il est facile de vérifier que si $T \in \mathcal{C}(H)$ l'opérateur $\begin{pmatrix} S_T & T^* S_{T^*} \\ T S_T & -S_{T^*} \end{pmatrix}$ défini sur $H \times H$ est unitaire et symétrique.

Corollaire 1.1. (cf [12]). Si $A, B \in \mathcal{C}(H)$ on a:

$$(1.8) \quad \delta(A, B) = \|BS_B S_A - S_{B^*} A S_A\|$$

$$(1.9) \quad g(A, B) = \max \{ \|AS_A S_B - S_{A^*} B S_B\|, \|BS_B S_A - S_{B^*} A S_A\| \}.$$

Proposition 1.5 Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$, $T \in \mathcal{L}(H)$; alors $\forall u \in H \{S_A u, AS_A u + TS_A u\} \in G(A+T)$ et si on pose $\varrho = \frac{\|T\|}{2} + \sqrt{1 + \frac{\|T\|^2}{4}}$ on a:

$$a) \|u\| \leq \varrho \|\{S_A u, (A+T) S_A u\}\|$$

$$b) \|(I - P_{G(B+T)}) P_{G(A+T)} \{S_A u, (A+T) S_A u\}\| \leq \varrho \|(BS_B S_A - S_{B^*} A S_A) u\| \quad (1.9).$$

Démonstration.

$$a) \|u\|^2 = \|S_A u\|^2 + \|AS_A u\|^2 = \|S_A u\|^2 + \|(A+T) S_A u - TS_A u\|^2 \\ \leq \|S_A u\|^2 + \|(A+T) S_A u\|^2 + \|TS_A u\|^2 + 2 \|(A+T) S_A u\| \|TS_A u\|.$$

Si $\alpha \in \mathbf{R}^+$ on obtient:

$$\|u\|^2 \leq (1 + \|T\|^2 + \alpha \|T\|^2) \|S_A u\|^2 + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \|(A+T) S_A u\|^2.$$

En choisissant α tel que $1 + \|T\|^2 + \alpha \|T\|^2 = 1 + \frac{1}{\alpha}$ on trouve $\alpha = \left(-\frac{\|T\|}{2} + \sqrt{1 + \frac{\|T\|^2}{4}}\right) / \|T\|$, d'où

$$\|u\|^2 \leq \varrho^2 (\|S_A u\|^2 + \|(A+T) S_A u\|^2) = \varrho^2 \|\{S_A u, (A+T) S_A u\}\|^2$$

$$b) \|(I - P_{G(B+T)}) P_{G(A+T)} \{S_A u, (A+T) S_A u\}\| \\ \leq \|\{S_A u, (A+T) S_A u\} - \{S_B v, (B+T) S_B v\}\| \text{ quel que soit } v.$$

Si, en particulier, on prend $v = S_B S_A u + B^* S_{B^*} A S_A u$ on trouve:

$$S_A u - S_B v = (I - R_B) S_A u - S_B B^* S_{B^*} A S_A u = B^* S_{B^*} (BS_B S_A - S_{B^*} A S_A) u \\ AS_A u - BS_B v = AS_A u - B R_B S_A u - (I - R_{B^*}) AS_A u \\ = -S_{B^*} (BS_B S_A - S_{B^*} A S_A) u.$$

Donc, en posant $w = (BS_B S_A - S_{B^*} A S_A) u$.

$$\|(I - P_{G(B+T)}) P_{G(A+T)} \{S_A u, (A+T) S_A u\}\|^2 \leq \|S_A u - S_B v\|^2 \\ + \|AS_A u - BS_B v + T(S_A u - S_B v)\|^2 \\ \leq \|B^* S_{B^*} w\|^2 + \|S_{B^*} w\|^2 + \|T\|^2 \|B^* S_{B^*} w\|^2 + 2\|T\| \|S_{B^*} w\| \|B^* S_{B^*} w\|$$

et en procédant comme plus haut

$$\|(I - P_{G(B+T)}) P_{G(A+T)} \{S_A u, (A+T) S_A u\}\| \\ \leq \varrho^2 (\|B^* S_{B^*} w\|^2 + \|S_{B^*} w\|^2) = \varrho^2 \|w\|^2.$$

Corollaire 1.2 Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$, $T \in \mathcal{L}(H)$; alors

$$\delta(A+T, B+T) \leq \varrho^2 \delta(A, B).$$

Démonstration. Soit $\{f, g\} \in H \times H$. Alors il existe un unique $u \in H$ tel que

$$P_{G(A+T)} \{f, g\} = \{S_A u, (A+T) S_A u\}$$

et

$$\|\{S_A u, (A+T) S_A u\}\| \equiv \|P_{G(A+T)} \{f, g\}\| \equiv \|f, g\|.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|(I - P_{G(B+T)}) P_{G(A+T)} \{f, g\}\| &\leq \|(BS_B S_A - S_{B^*} A S_A) u\| \\ &\leq \varrho \delta(A, B) \|u\| \leq \varrho^2 \delta(A, B) \|\{f, g\}\|, \end{aligned}$$

d'où le corollaire.

Corollaire 1.3. Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$, $T \in \mathcal{L}(H)$; alors

$$g(A+T, B+T) \leq \varrho^2 g(A, B).$$

Démonstration. Conséquence immédiate du corollaire précédent et de (1.9).

§ 2. L'Equivalence compacte faible

Définition 2.1 Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$. Nous dirons que A et B sont faiblement compact-équivalents (et nous écrivons $A \sim B$) si $P_{G(A)} - P_{G(B)}$ est un opérateur compact sur $H \times H$.

Remarque 2.1 \sim est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}(H)$.

Remarque 2.2. La proposition 1.3 montre que $A \sim B \Rightarrow R_A - R_B \in \mathcal{K}(H)$.

Proposition 2.1 (cf. [15]). Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$; alors

$$A \sim B \Leftrightarrow A^* \sim B^*.$$

Démonstration. Sur $H \times H$ notons J l'opérateur $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(H \times H)$. Alors on vérifie facilement que:

$$P_{G(A^*)} - P_{G(B^*)} = J (P_{G(B)} - P_{G(A)}) J^*.$$

Remarque 2.3. En vertu de la proposition 1.4 il est facile de constater que:

$$(2.1) \quad A \sim B \Leftrightarrow \begin{cases} AS_A S_B - S_{A^*} B S_B \in \mathcal{K}(H) \\ BS_B S_A - S_{B^*} A S_A \in \mathcal{K}(H) \end{cases}$$

car

$$\begin{aligned} P_{G(A)} - P_{G(B)} &= (I - P_{G(B)}) P_{G(A)} - P_{G(B)} (I - P_{G(A)}) \\ &= (I - P_{G(B)}) P_{G(A)} - [(I - P_{G(A)}) P_{G(B)}]^*. \end{aligned}$$

Proposition 2.2 (cf. [15]). Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$; alors

$$A - B \in \mathcal{K}(H) \Rightarrow A \sim B.$$

Démonstration

$$B \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow BS_B S_A - S_{B^*} A S_A = S_{B^*} (A - B) S_A \in \mathcal{K}(H).$$

Par symétrie entre A et B : $AS_A S_B - S_A B S_B \in \mathcal{K}(H)$ et la proposition découle de (2.1).

Definition 2.2. Soit $A, T \in \mathcal{C}(H)$ tels que:

$$D(T) \cong D(A); \quad TS_A \in \mathcal{K}(H).$$

Nous dirons alors que T est A -compact.

Remarque 2.4. Il est facile de voir (cf [15]) que cette définition de l' A -compacité est équivalente à celle donnée dans [8]. En particulier il en découle que si $A, B \in \mathcal{C}(H)$ et $A - B$ est A -compact, alors $D(A) = D(B)$ et $A - B$ est B -compact.

Proposition 2.3 (cf. [15]). Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$; alors:

$$A - B \text{ est } A\text{-compact} \Rightarrow A \sim B.$$

Démonstration. Identique à celle de la proposition précédente.

Remarque 2.5. L'équivalence compacte faible généralise strictement les relations d'équivalences induites par les deux types de « différence compacte » que nous venons de considérer. En effet, si $H = l^2$ et si $\{e_n\}$ denote la base canonique de H , posons: $\forall n \in \mathbf{N}: Ae_{2n} = n^2 e_{2n}$;

$$Ae_{2n+1} = (n+1) e_{2n+1} \quad (\text{donc } A = A^*)$$

$\forall n \in \mathbf{N} \quad Te_{2n} = ne_{2n+1}; \quad Te_{2n+1} = e_{2n+2}$ et $B = A + T$. Alors TS_A est compact (donc T est A -compact) et $A \sim B$. Par conséquent $A^* \sim B^*$ et cependant, comme il est facile de le vérifier, $B^* - A^*$ n'est pas A^* compact.

Proposition 2.4 (cf. [15]). Soit $A, B \in \mathcal{C}(H) \quad \forall \lambda \in C \quad A \sim B \Rightarrow \lambda A \sim \lambda B$.

Démonstration. On a $S_{A^*} S_{\lambda A^*}^* = S_{\lambda A^*}^* S_{A^*}$. Donc si $u \in D(A) \quad S_{A^*} \lambda A S_{\lambda A} u = S_{A^*} \lambda S_{\lambda A}^* A u = \lambda S_{\lambda A}^* S_{A^*} A u = \lambda S_{\lambda A}^* A S_{A^*} u$. Comme $D(A)$ est dense dans H , on en déduit que $\lambda A S_{\lambda A} = \lambda S_{\lambda A}^* S_{A^*} A S_{A^*}$. Donc

$$\begin{aligned} \lambda A S_{\lambda A} S_{\lambda B} - S_{\lambda A}^* \lambda B S_{\lambda B} &= \lambda S_{A^*}^{-1} S_{\lambda A}^* A S_{A^*} S_{B^*} S_B^{-1} S_{\lambda B} - \lambda S_{A^*}^{-1} S_{\lambda A}^* S_{A^*} B S_{B^*} S_B^{-1} S_{\lambda B} \\ &= \lambda S_{A^*}^{-1} S_{\lambda A}^* (A S_{A^*} S_{B^*} - S_{A^*} B S_{B^*}) S_B^{-1} S_{\lambda B} \end{aligned}$$

est compact. En utilisant la symétrie des hypothèses en A et B on conclut la démonstration de la proposition.

Proposition 2.5 (cf. [15]). Soit $A \in \mathcal{L}(H), B \in \mathcal{C}(H)$; alors $A \sim B \Rightarrow B \in \mathcal{L}(H)$ et $A - B \in \mathcal{K}(H)$.

Démonstration. $A \sim B \Rightarrow A S_{A^*} S_{B^*} - S_{A^*} B S_{B^*} \in \mathcal{K}(H)$ et comme $A \in \mathcal{L}(H) \quad S_{A^*} (A - B) S_{B^*} \in \mathcal{K}(H)$. Comme $S_{A^*}^{-1}$ est borné on en déduit de $(A - B) S_{B^*} \in \mathcal{K}(H)$, donc $A - B$ est B -compact d'où $D(B) = D(A) = H$. Donc $B \in \mathcal{L}(H)$ et par conséquent $S_{B^*}^{-1}$ est borné, d'où $A - B \in \mathcal{K}(H)$.

Proposition 2.6 (cf. [15]). Soit $A \in \mathcal{F}(H), B \in \mathcal{C}(H)$; alors $A \sim B \Rightarrow B \in \mathcal{F}(H)$.

Démonstration. Montrons d'abord que:

$$(2.2) \quad \forall u \perp N(A) \quad \|(I - P_{G(A)}) \{u, 0\}\| \cong \frac{c(A)}{\sqrt{1 + c^2(A)}} \|u\|.$$

En effet:

$\|(I - P_{G(A)}) \{u, 0\}\|^2 = \|(I - R_A) u, -AR_A u\|^2 = \|(I - R_A) u\|^2 + \|AR_A u\|^2 = \|AS_A u\|^2$.
Or $u \perp N(A) \Rightarrow S_A u \perp N(A)$ d'où $\|AS_A u\|^2 \cong c^2(A) \|S_A u\|^2 = c^2(A) \|u\|^2 - c^2(A) \|AS_A u\|^2$
d'où on déduit (2.2).

Montrons maintenant que $\dim N(B) < \infty$. Soit $\{u_n\}$ une suite bornée dans $N(B) \cap N(A)^\perp$. Alors:

$(I - P_{G(A)}) \{u_n, 0\} = (P_{G(B)} - P_{G(A)}) \{u_n, 0\}$ et comme $P_{G(B)} - P_{G(A)}$ est compact il existe une sous-suite — notée encore $\{u_n\}$ sans perte de généralité — telle que $(I - P_{G(A)}) \{u_n, 0\}$ soit convergente, ce qui avec (2.2) entraîne que $\{u_n\}$ est convergente et par conséquent que $\dim N(B) \cap N(A)^\perp < \infty$. Comme par hypothèse $\dim N(A) < \infty$ on trouve bien que $\dim N(B) < \infty$.

Montrons maintenant que $R(B)$ est fermé. Pour cela, comme $\dim (N(A) + N(B)) < \infty$ il suffit de montrer que la restriction de B à $(N(A) + N(B))^\perp$ a une image fermée.

Soit donc $\{u_n\} \subseteq (N(A) + N(B))^\perp \cap D(B)$ telle que $\{Bu_n\} \rightarrow f$. Supposons que $\{u_n\}$ ne soit pas bornée: alors il existe une sous-suite — notée encore $\{u_n\}$ sans perte de généralité — telle que $\|u_n\| \uparrow \infty$. En outre:

$$(2.3) \quad (I - P_{G(A)}) \{u_n, 0\} = (P_{G(B)} - P_{G(A)}) \{u_n, Bu_n\} - (I - P_{G(A)}) \{0, Bu_n\}.$$

En divisant par $\|u_n\|$ et en tenant compte du fait que $\{u_n/\|u_n\|, Bu_n/\|u_n\|\}$ est bornée on déduit qu'il existe une sous-suite — notée encore $\{u_n\}$ sans perte de généralité — telle que $(P_{G(B)} - P_{G(A)}) \{u_n/\|u_n\|, Bu_n/\|u_n\|\}$ converge quand $n \rightarrow \infty$. Donc $(I - P_{G(A)}) \{u_n/\|u_n\|, 0\}$ converge et par conséquent en vertu de (2.2), $\{u_n/\|u_n\|\}$ converge vers u , $\{Bu_n/\|u_n\|\}$ converge vers 0 d'où $Bu = 0$ et comme $u \perp N(B)$, $u = 0$ contradiction avec $\|u\| = 1$. Donc $\{u_n\}$ est bornée et à partir de (2.3) on déduit encore qu'il existe une sous-suite — notée encore $\{u_n\}$ sans perte de généralité — telle que $(P_{G(B)} - P_{G(A)}) \{u_n, Bu_n\}$ soit convergente et par conséquent telle que $(I - P_{G(A)}) \{u_n, 0\}$ soit convergente d'où finalement $\{u_n\}$ converge vers u et $f = Bu$ ce qui complète la démonstration de la proposition.

Proposition 2.7 (cf. [15]). Soit $A, B \in \mathcal{O}(H)$; alors

$$(2.4) \quad \begin{cases} I + A^*B, & I + BA^*, & I + B^*A, & I + AB^* \in \mathfrak{F}(H) \end{cases}$$

$$(2.5) \quad A \sim B \Rightarrow \begin{cases} (I + A^*B)^* = I + B^*A; & (I + BA^*)^* = I + AB^* \end{cases}$$

$$(2.6) \quad \chi(I + A^*B) = \chi(I + BA^*) = -\chi(I + B^*A) = -\chi(I + AB^*).$$

Démonstration. $A \sim B \Rightarrow P_{G(A)} - P_{G(B)}$ compact $\Rightarrow I - P_{G(A)} + P_{G(B)} \in \mathfrak{F}(H \times H) \Rightarrow R(I - P_{G(A)} + P_{G(B)})$ fermée, et en utilisant le corollaire 3 de [5] on en déduit que $G(A)^\perp + G(B)$ est fermé. On voit de même que $I - P_{G(B)} + P_{G(A)} \in \mathfrak{F}(H \times H)$ et on en déduit que $G(A)^\perp \cap G(B) \subseteq N(I - P_{G(B)} + P_{G(A)})$ est de dimension finie. Or $\{u, v\} \in G(A)^\perp \cap G(B) \Rightarrow u \in D(B)$, $v = Bu \in D(A^*)$, $A^*v = -u$, d'où: $(I + A^*B)u = 0$ et $(I + BA^*)v = 0$. Inversement $u \in N(I + A^*B) \Rightarrow v = Bu \in N(I + BA^*)$ et $\{u, v\} \in G(A)^\perp \cap G(B)$. Donc

$$(2.7) \quad \dim N(I + A^*B) = \dim N(I + BA^*) = \dim G(A)^\perp \cap G(B) < \infty$$

Par symétrie des hypothèses en A et B on trouve de même:

$$(2.8) \quad \dim N(I + B^*A) = \dim N(I + AB^*) = \dim G(A) \cap G(B)^\perp < \infty$$

Soit maintenant $f \perp N(I + B^*A)$. Alors $\{f, 0\} \perp G(A) \cap G(B)^\perp$ d'où (cf. [14] Chap. I) $\{f, 0\} \in G(A)^\perp + G(B)$. Donc:

$$\exists u \in D(B), \quad \exists v \in D(A^*) \quad \text{tels que} \quad f = A^*v + u; \quad 0 = -v + Bu$$

ou encore $u \in D(A^*B)$ et $f = (I + A^*B)u$, ce qui montre que $N(I + B^*A)^\perp \subseteq R(I + A^*B)$ et comme l'inclusion contraire est évident on a:

$$(2.9) \quad R(I + A^*B) = N(I + B^*A)^\perp$$

d'où $R(I + A^*B)$ est fermée.

Par symétrie en A et B on trouve aussi:

$$(2.10) \quad R(I + B^*A) = N(I + A^*B)^\perp \quad \text{est fermée.}$$

On en déduit (cf. [14], Prop. 2.2.3) que $I + A^*B$ et $I + B^*A$ sont des opérateurs fermés.

Montrons maintenant que $D(I + A^*B)$ est dense dans H . Soit $u \in H$ tel que $\forall w \in D(I + A^*B) \quad (u, w) = 0$. Alors $u \perp N(I + A^*B)$ et $\exists v$ tel que $u = (I + B^*A)v$. D'où:

$$\forall w \in D(I + A^*B) \quad (u, v) = ((I + B^*A)v, w) = (v, (I + A^*B)w) = 0$$

Donc $v \perp R(I + A^*B) \Rightarrow v \in N(I + B^*A) \Rightarrow u = 0$. On voit donc que $I + A^*B, I + B^*A \in \mathcal{F}(H)$.

En outre

$$N((I + A^*B)^*) = R(I + A^*B)^\perp = N(I + B^*A)$$

$$R((I + A^*B)^*) = N(I + A^*B)^\perp = R(I + B^*A).$$

Comme évidemment $(I + B^*A) \subseteq (I + A^*B)^*$ on voit qu'on a en fait $I + B^*A = (I + A^*B)^*$.

Soit enfin $g \perp N(I + AB^*)$. Alors $\{0, g\} \perp G(A) \cap G(B)^\perp$ et en procédant comme nous venons de le faire nous en déduisons que

$$I + AB^*, \quad I + BA^* \in \mathcal{F}(H)$$

et que

$$(I + AB^*)^* = I + BA^*$$

Le reste de la proposition se déduit de (2.7), (2.8), (2.9) et (2.10).

Remarque 2.6. Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$; alors:

$g(A, B) < 1 \Rightarrow (2.4), (2.5)$ et (2.6) avec $\chi(1 + A^*B) = 0$. En effet $g(A, B) < 1 \Rightarrow G(A) \cap G(B)^\perp = G(A)^\perp \cap G(B) = \{0\}$ et $G(A)^\perp + G(B) = G(A) + G(B)^\perp = H$. Donc en

particulier

$$\begin{aligned}\dim N(I + A^*B) &= \dim N(I + BA^*) = \dim N(I + AB^*) \\ &= \dim N(I + B^*A) = 0\end{aligned}$$

Remarque 2.7. Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$; alors:

$A - B$ est A -compact \Rightarrow (2.4), (2.5) et (2.6) avec $\chi(1 + A^*B) = 0$. En effet, l'hypothèse entraîne $A \sim B$, d'où (2.4), (2.5) et (2.6). En outre $I = (I + AA^*) R_{A^*} = R_{A^*} + AS_A A^* S_{A^*} = R_{A^*} + (A - B) S_A A^* S_{A^*} + BS_A A^* S_{A^*} = (A - B) S_A A^* S_{A^*} + (I + BA^*) R_{A^*}$. Donc $\chi((I + BA^*) R_{A^*}) = \chi(I) = 0$. Comme $R_{A^*}^{-1} \in \mathcal{F}(H)$

$$\begin{aligned}\chi(I + BA^*) &= \chi((I + BA^*) R_{A^*} R_{A^*}^{-1}) = \chi((I + BA^*) R_{A^*}) + \chi(R_{A^*}^{-1}) \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

en utilisant le théorème 2.1 de [4].

Remarque 2.8. Soit $A \in \mathcal{F}(H)$, $B \in \mathcal{C}(H)$; alors

$$A \sim B \Rightarrow \chi(I + A^*B) = \chi(B) - \chi(A).$$

En effet $A \sim B \Rightarrow B \in \mathcal{F}(H)$ d'où $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0, A/\lambda, B/\lambda \in \mathcal{F}(H)$ et $A/\lambda \sim B/\lambda$ et par conséquent $|\lambda|^2 + A^*B \in \mathcal{F}(H)$. Comme $A^*B \in \mathcal{F}(H)$, et en vertu du théorème 0.2 du corollaire 1.3 et de (0.3) on voit que

$$\chi(I + A^*B) = \chi(A^*B) = \chi(B) - \chi(A).$$

§ 3. L'Equivalence compacte forte

Proposition 3.1. Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$, $T \in \mathcal{L}(H)$; alors

$$(3.1) \quad A \sim B \Rightarrow A + T \sim B + T.$$

Démonstration. Soit $\{f_n, g_n\}$ une suite bornée dans $H \times H$. Avec les notations de la proposition 1.5, il existe pour chaque n un unique $u_n \in H$ tel que $\{S_A u_n, (A + T) S_A u_n\} = P_{G(A+T)} \{f_n, g_n\}$; avec $\|u_n\| \leq \varrho \|\{f_n, g_n\}\|$. Donc $\{u_n\}$ est une suite bornée dans H . D'après la remarque 2.3. $BS_B S_A - S_{B^*} A S_A$ est compact. Il existe donc une sous-suite — notée encore $\{u_n\}$ sans perte de généralité — telle que $\{(BS_B S_A - S_{B^*} A S_A) u_n\}$ soit une suite de CAUCHY et donc, en utilisant (1.9)

$$(I - P_{G(B+T)}) P_{G(A+T)} \{f_n, g_n\}$$

est également une suite de CAUCHY. Par conséquent $(I - P_{G(B+T)}) P_{G(A+T)}$ est compact et en utilisant la symétrie des hypothèses en A et B et de nouveau la remarque 2.3. la proposition est démontrée.

Corollaire 3.1. Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$; alors:

$$(3.2) \quad A \sim B \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad A - \lambda I \sim B - \lambda I \quad \text{d'où} \quad A \sim B \Rightarrow \varrho_e(A) = \varrho_e(B).$$

Proposition 3.2. Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$, $A \sim B$; alors $W(A; B) = I - R_A - R_B + 2R_A R_B$ est un opérateur inversible de $\mathcal{L}(H)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} I - R_A - R_B + 2R_A R_B &= I - 2R_A (I - R_A) + R_A - R_B - 2R_A (R_A - R_B) \\ &= I - 2A^* R_A^* A R_A + (I - 2R_A) (R_A - R_B). \end{aligned}$$

En vertu de (1.4) $I - 2A^* R_A^* A R_A \cong \frac{1}{2} I$ est inversible, donc de Fredholm et d'après la remarque 2.2 $R_A - R_B$ (et par conséquent $(I - 2R_A) (R_A - R_B)$) est compact. Alors le théorème 0.1 entraîne que $W(A; B) \in \mathcal{F}(H) \cap \mathcal{L}(H)$ et $\chi(W(A; B)) = 0$.

Soit maintenant $u \in N(W(A; B))$. Alors:

$$(I - R_B) u = B^* B R_B u = R_A (I - 2R_B) u \in D(A^* A).$$

Donc

$$A^* A B^* B R_B u = (I - R_A) (I - 2R_B) u = W(A; B) u - R_B u = -R_B u$$

d'où

$$R_B u \in N(I + A^* A B^* B) \quad \text{et} \quad A^* A B^* B R_B u \in D(B)$$

Donc

$$0 = B(I + A^* A B^* B) R_B u = (I + B A^* (B A^*)^*) B R_B u$$

puisque

$$A \sim B \Rightarrow B A^* \in \mathcal{C}(H) \quad \text{et} \quad (B A^*)^* = A B^*$$

Donc

$$\begin{aligned} B R_B u &\in N(I + B A^* (B A^*)^*) = \{0\} \\ \Rightarrow R_B u &= 0 \Rightarrow u = 0 \quad \text{d'où} \quad N(W(A; B)) = \{0\}. \end{aligned}$$

Comme $\chi(W(A; B)) = 0$, $R(W(A; B)) = H$ et la proposition est démontrée.

Remarque 3.1. A partir de la proposition 1.3 on voit que $W(A; B)$ est une application continue de $\mathcal{C}(H) \times \mathcal{C}(H)$ dans $\mathcal{L}(H)$.

Proposition 3.3. Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$; alors

$$(3.3) \quad A \sim B \Rightarrow A^* R_{B A^*} = R_B (W(A; B))^{-1} A^* R_{A^*}.$$

Démonstration. $\forall u \in H$ $A^* R_{B A^*} u \in D(A B^* B) \subseteq D(B^* B)$. Donc $R_B^{-1} A^* R_{B A^*} u$ existe et

$$\begin{aligned} (2R_A - I) A^* R_{B A^*} u + (I - R_A) R_B^{-1} A^* R_{B A^*} u \\ = (2R_A - I + I - R_A) A^* R_{B A^*} u + (I - R_A) B^* B A^* R_{B A^*} u \\ = A^* R_{A^*} R_{B A^*} u + A^* R_{A^*} (I - R_{B A^*}) u = A^* R_{A^*} u \end{aligned}$$

Donc

$$A^* R_{A^*} u = [(2R_A - I) R_B + I - R_A] R_B^{-1} A^* R_{B A^*} u$$

ou encore $A^* R_{A^*} u = W(A; B) R_B^{-1} A^* R_{B A^*} u$ ce qui entraîne le résultat annoncé.

Corollaire 3.1. Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$; alors

$$(3.4) \quad A \sim B \Rightarrow \|A^* S_{B A^*}\|^2 \leq \| (W(A; B))^{-1} \|.$$

Démonstration. Soit $u \in D(A)$. Alors

$$A^* R_{BA^*} A u = R_B(W(A; B))^{-1} (I - R_A) u = A^* S_{BA^*} S_{BA^*} A u$$

Donc

$$\|S_{BA^*} A u\|^2 \leq \|u\| \|R_B(W(A; B))^{-1} (I - R_A) u\|$$

Or

$$S_{BA^*} A u = (A^* S_{BA^*})^* u$$

Donc

$$\|A^* S_{BA^*}\|^2 = \|(A^* S_{BA^*})^*\|^2 \leq \|W(A; B)^{-1}\|.$$

Proposition 3.4. Soit $A, B, C, D \in \mathcal{C}(H)$ tels que DC^* , BA^* existent dans $\mathcal{C}(H)$ avec $(DC^*)^* = CD^*$ et $(BA^*)^* = AB^*$; alors:

$$\begin{aligned} (3.5) \quad & \forall u \forall v \in H: ((BA^* S_{BA^*} S_{DC^*} - S_{AB^*} DC^* S_{DC^*}) u, v) \\ & = ((A^* S_{A^*} S_{C^*} - S_{AC^*} S_{C^*}) S_{C^*}^{-1} S_{DC^*} u, S_A^{-1} B^* S_{AB^*} v) \\ & \quad + ((BS_B S_D - S_{B^*} D S_D) S_D^{-1} C^* S_{DC^*} u, S_{B^*}^{-1} S_{AB^*} v). \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} & ((BA^* S_{BA^*} S_{DC^*} - S_{AB^*} DC^* S_{DC^*}) u, v) \\ & = (S_{DC^*} u, AB^* S_{AB^*} v) - (DC^* S_{DC^*} u, S_{AB^*} v) \\ & = (S_{DC^*} u, AS_A \cdot S_A^{-1} B^* S_{AB^*} v) - (DS_D S_D^{-1} C^* S_{DC^*} u, S_{AB^*} v) \\ & = (A^* S_{A^*} S_{DC^*} u, S_A^{-1} B^* S_{AB^*} v) - (S_{AC^*} S_{DC^*} u, S_A^{-1} B^* S_{AB^*} v) \\ & \quad + (S_D^{-1} C^* S_{DC^*} u, S_D B^* S_{AB^*} v) - (S_D^{-1} C^* S_{DC^*} u, D^* S_D S_{AB^*} v) \\ & = ((A^* S_{A^*} S_{C^*} - S_{AC^*} S_{C^*}) S_{C^*}^{-1} S_{DC^*} u, S_A^{-1} B^* S_{AB^*} v) \\ & \quad + (S_D^{-1} C^* S_{DC^*} u, (S_D B^* S_{B^*} - D^* S_D S_{B^*}) S_{B^*}^{-1} S_{AB^*} v) \end{aligned}$$

d'où on déduit (3.5).

Proposition 3.5. Soit $A, B, C, D \in \mathcal{C}(H)$; alors:

$$\begin{aligned} (3.6) \quad & A \sim B, C \sim D \Rightarrow \delta(DC^*, BA^*) \\ & \leq \max \{\delta(A, C), \delta(D, B)\} (1 + \|(W(A; B))^{-1}\| + \|(W(C; D))^{-1}\|). \end{aligned}$$

Démonstration. En prenant $v = (BA^* S_{BA^*} S_{DC^*} - S_{AB^*} DC^* S_{DC^*}) u$ dans (3.5) on trouve:

$$\begin{aligned} \|v\|^2 & \leq \delta(C^*, A^*) \|S_{C^*}^{-1} S_{DC^*} u\| \|S_A^{-1} B^* S_{AB^*} v\| \\ & \quad + \delta(D, B) \|S_D^{-1} C^* S_{DC^*} u\| \|S_{B^*}^{-1} S_{AB^*} v\| \\ & \leq \max \{\delta(A, C), \delta(D, B)\} (\|S_{DC^*} u\|^2 + 2 \|C^* S_{DC^*} u\|^2 \\ & \quad + \|DC^* S_{DC^*} u\|^2)^{\frac{1}{2}} (\|S_{AB^*} v\|^2 + 2 \|B^* S_{AB^*} v\|^2 + \|AB^* S_{AB^*} v\|^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En utilisant (1.6) et le corollaire 3.1

$$\begin{aligned} \|v\|^2 & \leq \max \{\delta(A, C), \delta(D, B)\} (\|u\|^2 + 2 \|(W(C; D))^{-1}\| \|u\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad (\|v\|^2 + 2 \|(W(B; A))^{-1}\| \|v\|^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ou encore: $\|v\| \leq \max \{\delta(A, C), \delta(D, B)\} (1 + \|(W(A; B))^{-1}\| + \|(W(C; D))^{-1}\|) \|u\|$
d'où se déduit la proposition car $W(A; B) = (W(B; A))^*$.

Corollaire 3.2. Soit $A, B, C, D \in \mathcal{C}(H)$; alors

$$(3.7) \quad A \sim B, \quad C \sim D \Rightarrow g(BA^*, DC^*) \leq \max \{g(A, C), g(B, D)\} \\ (1 + \|(W(A; B))^{-1}\| + \|(W(C; D))^{-1}\|).$$

Corollaire 3.3. Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$; alors

$$(3.8) \quad A \sim B \Rightarrow g(BA^*, (B - \lambda I)(A^* - \lambda I)) \leq |\lambda| (1 + \|(W(A; B))^{-1}\| \\ + \|(W(A - \lambda I; B - \lambda I))^{-1}\|).$$

Démonstration. En prenant $C = A - \lambda I$; $D = B - \lambda I$ dans (3.7) et en utilisant (0.3).

Proposition 3.6. Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$; alors

$$A \sim B \Rightarrow \begin{cases} \forall \lambda \in C \chi(I + (B - \lambda I)(A^* - \lambda I)) = \chi(I + BA^*) \\ \forall \lambda \in \rho_e(A) = \rho_e(B) \quad \chi(B - \lambda I) = \chi(A - \lambda I) + \chi(I + BA^*) \end{cases}.$$

Démonstration. Soit $\lambda_0 \in C$. Alors la remarque 3.1 et (3.8) entraînent que si $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $|\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow \|(W(A - \lambda I; B - \lambda I))^{-1}\| \leq 2 \|(W(A - \lambda_0 I; B - \lambda_0 I))^{-1}\|$ et $g((B - \lambda_0 I)(A^* - \lambda_0 I), (B - \lambda I)(A^* - \lambda I)) < \varepsilon$. En utilisant maintenant le corollaire 1.3 et en posant $\gamma = c(I + (B - \lambda_0 I)(A^* - \lambda_0 I)) > 0$ on voit qu'il existe $\delta > 0$ tel que:

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow g((I + (B - \lambda_0 I)(A^* - \lambda_0 I)), (I + (B - \lambda I)(A^* - \lambda I))) \\ < \gamma / \sqrt{1 + \gamma^2}$$

d'où en vertu du théorème 0.2 on déduit que $\chi(I + (B - \lambda I)(A^* - \lambda I))$ est localement constant sur C et donc constant (et par conséquent égal à $\chi(I + BA^*)$).

En outre si $\lambda \in \rho_e(A) = \rho_e(B)$ et en utilisant la remarque 2.8 on trouve:

$$-\chi(A - \lambda I) + \chi(B - \lambda I) = \chi((B - \lambda I)(A^* - \lambda I)) \\ = \chi(I + (B - \lambda I)(A^* - \lambda I)) = \chi(I + BA^*).$$

Proposition 3.7. Soit $A, B, C \in \mathcal{C}(H)$; alors

$$(3.9) \quad A \sim B \sim C \Rightarrow \chi(I + AB^*) + \chi(I + BC^*) + \chi(I + CA^*) = 0.$$

Démonstration. (3.5) peut également s'écrire:

$$BA^*S_{BA^*}S_{DC^*} - S_{AB^*}DC^*S_{DC^*} \\ = (S_A^{-1}B^*S_{AB^*})^*(A^*S_{A^*}S_{C^*} - S_{AC^*}S_{C^*})S_{C^*}^{-1}S_{DC^*} \\ + (S_{B^*}^{-1}S_{AB^*})^*(BS_B S_D - S_{B^*}DS_D)S_D^{-1}C^*S_{DC^*}.$$

En faisant les substitutions appropriées, on en déduit:

$$BA^*S_{BA^*}S_{CA^*} - S_{AB^*}CA^*S_{CA^*} \\ = (S_{B^*}^{-1}S_{AB^*})^*(BS_B S_C - S_{B^*}CS_C)S_C^{-1}A^*S_{CA^*}$$

$$\begin{aligned}
& CA^*S_{CA^*}S_{BA^*} - S_{AC^*}BA^*S_{BA^*} \\
&= (S_{C^*}^{-1}S_{AC^*})^* (CS_{CB} - S_{C^*}BS_B) S_B^{-1}A^*S_{BA^*}
\end{aligned}$$

d'où

$$(3.10) \quad B \sim C \Rightarrow BA^* \sim CA^*.$$

De même on trouve:

$$\begin{aligned}
& A^*AS_{A^*A}S_{C^*B} - S_{A^*A}C^*BS_{C^*B} \\
&= (S_{A^*}^{-1}AS_{A^*A})^* (AS_{AB} - S_{A^*}BS_B) S_B^{-1}S_{C^*B} \\
&\quad + (S_{A^*}^{-1}S_{A^*A})^* (A^*S_{A^*}S_{C^*} - S_{AC^*}S_{C^*}) S_{C^*}^{-1}BS_{C^*B}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& C^*BS_{C^*B}S_{A^*A} - S_{B^*C}A^*AS_{A^*A} \\
&= (S_{B^*}^{-1}CS_{B^*C})^* (BS_{BA} - S_{B^*}AS_A) S_A^{-1}S_{A^*A} \\
&\quad + (S_{C^*}^{-1}S_{B^*C})^* (C^*S_{C^*}S_{A^*} - S_{CA^*}S_{A^*}) S_{A^*}^{-1}AS_{A^*A}
\end{aligned}$$

d'où

$$(3.11) \quad A \sim B, \quad A \sim C \Rightarrow A^*A \sim C^*B.$$

De (3.10) et (3.11) on déduit: $I + A^*AB^*C, I + CA^*AB^* \in \mathfrak{F}(H)$. En outre, si $u \in N(I + A^*AB^*C)$ alors $u \in D(C)$ et $Cu \in N(I + CA^*AB^*)$. Donc $C: N(I + A^*AB^*C) \rightarrow N(I + CA^*AB^*)$ et il est facile de voir que cette application est bijective. Donc $\dim N(I + CA^*AB^*) = \dim N(I + A^*AB^*C)$. De même $\dim N(I + C^*BA^*A) = \dim N(I + BA^*AC^*)$ d'où $\chi(I + A^*AB^*C) = \chi(I + CA^*AB^*)$. Or $-1 \in \varrho_e(C^*B) = \varrho_e(A^*A)$. Donc en utilisant la proposition 3.6

$$\begin{aligned}
\chi(I + A^*AB^*C) &= \chi(I + A^*A) - \chi(I + C^*B) = -\chi(I + C^*B) \\
&= -\chi(I + BC^*).
\end{aligned}$$

De même $-1 \in \varrho_e(CA^*) = \varrho_e(BA^*)$, donc comme plus haut:

$$\chi(I + CA^*AB^*) = \chi(I + CA^*) - \chi(I + BA^*) \text{ et finalement:}$$

$$-\chi(I + BC^*) = \chi(I + CA^*) + \chi(I + AB^*) \text{ et la proposition est démontrée.}$$

Définition 3.1. Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$. Nous dirons que A et B sont fortement compact-équivalents (et nous écrirons $A \approx B$) si $A \sim B$ et $\chi(I + AB^*) = 0$.

Proposition 3.8. \approx est une relation d'équivalence.

Démonstration. Le réflexivité et la symétrie sont évidentes. La transitivité se déduit immédiatement de (3.9).

Remarque 3.2. Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$. Alors si $A - B$ est A -compact $A \approx B$. (Conséquence immédiate de la définition et de la remarque 2.7).

Remarque 3.3. Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$; alors

$$A \approx B \Rightarrow \begin{cases} A^* \approx B^* \\ \forall \lambda \in \mathbb{C} \lambda A \approx \lambda B. \end{cases}$$

Remarque 3.4. Soit $A, B \in \mathcal{C}(H)$; alors:

$$A \approx B \Rightarrow \forall \lambda \in \varrho_e(A) = \varrho_e(B), \quad \chi(A - \lambda I) = \chi(B - \lambda I)$$

(conséquence immédiate de la proposition 3.6). Réciproquement

$$A \sim B \text{ et } \exists \lambda \in \varrho_e(A) = \varrho_e(B) \text{ tel que } \chi(A - \lambda I) = \chi(B - \lambda I) \Rightarrow A \approx B.$$

Theoreme 3.1. (*Deuxième théorème de stabilité*)

$$\forall A \in \mathfrak{F}(H), \quad \forall B \in \mathcal{C}(H)$$

$$A \approx B \Rightarrow B \in \mathfrak{F}(H), \quad \chi(B) = \chi(A).$$

Démonstration. Conséquence immédiate des propositions 2.6 et 3.6.

§ 4. Applications

La notion d'équivalence compacte (forte ou faible) permet d'étendre à $\mathcal{C}(H)$ un certain nombre de résultats et de notions associés à $\mathfrak{L}(H)$.

Definition 4.1. $A \in \mathcal{C}(H)$ est essentiellement normal si et seulement si $A^*A \sim AA^*$.

Remarque 4.1. Il est facile de voir que $A^*A \sim AA^*$ si et seulement si $A^*A \approx AA^*$.

Proposition 4.1 (cf. [15]). A est essentiellement normal si et seulement si $R_A - R_{A^*} \in \mathfrak{K}(H)$.

Proposition 4.2 (cf. [13], [15]). Soit $A \in \mathcal{C}(H)$, essentiellement normal. Alors:

$$\forall \lambda \in \varrho_e(A), \quad \chi(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \exists N \in \mathcal{C}(H),$$

normal tel que $A \approx N$.

La démonstration de ces deux propositions est dans [15] de même que celle du corollaire suivant.

Corollaire 4.1. L'ensemble $\{A \in \mathcal{C}(H) \mid \exists N \in \mathcal{C}(H) \text{ normal tel que } A \approx N\}$ est fermé dans $\mathcal{C}(H)$. La proposition 4.2 admet la variante suivante:

Proposition 4.3. Soit $A \in \mathcal{C}(H)$, essentiellement normal. Alors $\forall \lambda \in \varrho_e(A)$, $\chi(A - \lambda I) = \text{constante} \Leftrightarrow \exists N \in \mathcal{C}(H)$, normal tel que $A \sim N$.

Remarque 4.2. La condition de gauche de cette proposition ainsi que celle de la proposition 4.2 est toujours vérifiée lorsque $\varrho_e(A) = \emptyset$. C'est également le cas dans la proposition 4.3 lorsque $\varrho_e(A)$ est connexe.

Les résultats suivants seront énoncés plus en détail et démontrés dans un travail ultérieur à paraître.

Proposition 4.4. Soit $A \in \mathcal{C}(H)$, essentiellement normal. Alors $D(A^\omega) = \bigcap_{n \geq 0} D(A^n)$ est dense dans H

et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n \in \mathcal{C}(H).$

En considérant le quotient de $\mathcal{C}(H)$ par la relation d'équivalence \approx on obtient un espace métrique contenant l'algèbre de Calkin (cf. [7]) associée à H comme

sous-ensemble ouvert et dense. Chaque classe d'équivalence est un sous-ensemble fermé et connexe de $\mathcal{C}(H)$.

Enfin on peut étendre à $\mathcal{C}(H)$ les résultats de [1] et [18] sur $\mathcal{L}(H)$ concernant la « correction » par perturbations compactes du spectre d'un opérateur.

Bibliographie

- [1] C. APOSTOL, The correction by compact perturbation of the singular behavior of operators. *Rev. Roum. Math. P. et Appl.* **XXI** (N° 2) (1976) 155–175
- [2] F. V. ATKINSON, La solvabilité normale d'équation linéaires dans des espaces normés. *Math. Sbornik N.S.* **28** (70) (1951) 3–14 (en Russe)
- [3] L. BROWN, R. G. DOUGLAS, P. A. FILLMORE, Unitary equivalence modulo the compact operators ... *Lect. Notes Math.* N° **345** (1973) 58–127
- [4] H. O. CORDES, J. PH. LABROUSSE, The invariance of the index in the metric space of closed operators. *J. Math. and Mech.* **12** (5) (1963) 693–720
- [5] P. A. FILLMORE, J. P. WILLIAMS, On operator ranges. *Adv. in Math.* **7** (3) (1971) 254–281
- [6] S. GOLDBERG, Unbounded linear operators. *Mc Graw Hill* (New York) (1966)
- [7] P. DE LA HARPE, Initiation à l'algèbre de Calkin. *Lect. Notes in Math.* N° **725** (1978) 180–219
- [8] T. KATO, Perturbations theory for linear operators. *Springer-Verlag* (New York) (1966)
- [9] M. G. KREIN, M. A. KRASNOSELSKI, Théorèmes fondamentaux sur l'extension d'opérateurs hermitiens. *Usp. Mat. Nauk* **2** (3) (19) (1947) 60–106 (en Russe)
- [10] —, Stabilité de l'indice d'un opérateur non borné. *Math. Sbornik N.S.* **30** (72) (1952) 219–224 (en Russe)
- [11] J. PH. LABROUSSE, On a metric space of closed operators on a Hilbert space. *Rev. Mat. Fis. Teorica. Univ. N. Tucuman (Argentine)* **XVI** (1 et 2) (1966) 45–77
- [12] —, Quelques topologies sur des espaces d'opérateurs dans des espaces de Hilbert. *Dept. de Math. Univ. de Nice* (1970)
- [13] —, Une caractérisation topologique des générateurs infinitésimaux ... *Acad. Naz. Lincei* **LII** (5) (1972) 631–636
- [14] —, Les opérateurs quasi-Fredholm. *Rend. Circ. Mat. Palermo (Ser. II)* **XXIX** (1980) 161–258
- [15] B. MERCIER, Généralisation d'un théorème de Brown-Douglas-Fillmore (Thèse) *Dept. de Math. Univ. de Nice* (1984)
- [16] B. SZ-NAGY, On the stability of the index of unbounded linear transformations. *Act. Math. Acad. Sci. Hung.* **3** (1952) 49–52
- [17] F. RIESZ, B. SZ-NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*. *Akad. Kiado* (Budapest) (1952)
- [18] J. G. STAMPFLI, Compact perturbations, normal eigenvalues and a problem of Salinas. *J. London Math. Soc.* (2) (1974) 165–175
- [19] M. H. STONE, On unbounded operators in a Hilbert space. *J. Indian Math. Soc.* **15** (1951) 155–192

*Département de Mathématiques
Université de Nice
Parc Valrose
06034 NICE Cedex
France*